

文章编号:1007-2934(2022)06-0012-05

# 磁子在粘性液体中稳定悬浮现象的研究

冯娟娟<sup>1\*</sup>, 李元杰<sup>2</sup>, 王心华<sup>1</sup>

(1.兰州大学 物理科学与技术学院 物理学国家级实验教学示范中心,甘肃 兰州 730000;2.兰州大学 物理科学与技术学院,甘肃 兰州 730000)

**摘要:**理论和实验表明,磁力搅拌器能提供一种简单的被动磁悬浮方法,在这种方法中,悬浮子可以长时间地稳定悬浮。研究了这一现象,理论分析了悬浮的起因,并定量分析了悬浮子的运动(垂直振荡、旋转和摇摆的组合),实验结论与力学模型分析结果非常吻合(运用龙格库塔方法解二元二阶微分方程组)。本研究对双向微流控泵的发展具有启示意义,提供了复杂的商业悬浮器的替代方案。

**关键词:**流体动力学;流变学;铁磁性;涡流

**中图分类号:** O 482.5 **文献标志码:** A **DOI:** 10.14139/j.cnki.cn22-1228.2022.06.002

悬浮是一种利用磁场、电场或声场使物体悬浮在稳定的机械平衡状态以对抗重力的技术。寻找便宜而简单的稳定悬浮方法为其广泛应用提供了前景,如无摩擦运输、无容器存储、无接触操纵等<sup>[1-7]</sup>。对于磁悬浮,需要考虑欧肖定理,该定理表明,偶极子只有在动态稳定的情况下才能被悬浮<sup>[8-13]</sup>。本文讨论一种新的方法:使用标准的实验室工具:磁力搅拌器,实现被动磁悬浮。利用这个装置,在甘油中,观察到一个简单的棒状磁子经历了从稳定的旋转模式到稳定的振荡悬浮模式的转变。

主要的实验装置为磁力搅拌器,棒状磁子,粘性液体-甘油。通过逐渐增大驱动子的转速。在某些特定情况下,磁力搅拌器的“搅拌子”在搅拌时,能在粘性流体中稳定地上升和悬浮。本文探究了“搅拌子”动态稳定的起源,讨论了相关参数的影响。

所谓的动态稳定包括竖直稳定和径向稳定。竖直稳定是指在竖直方向上磁子几何中心高度基本保持不变。而径向稳定是指磁子在水平方向基本处于中心位置,并且认为磁子能保持30 s以上稳定,并且给其微扰可以回归。

## 1 悬浮子的动力学

驱动子和悬浮子在悬浮子角速度 $\omega_d = \omega_\uparrow$ 时

悬浮子开始悬浮。当 $\omega_d$ 减小到 $\omega_\uparrow$ 时,悬浮子不下落,直到 $\omega_d = \omega_\downarrow$ 时下落。其中 $\omega_d$ 是驱动子角速度, $\omega_\uparrow$ 定义为悬浮子开始悬浮时搅拌子的临界角速度, $\omega_\downarrow$ 定义为悬浮子从悬浮状态开始下落时搅拌子的临界角速度。

水平方向上的转动运动的分析:由于磁力的水平分量提供的磁力矩作周期性变化,悬浮后的悬浮子在水平方向上的转动除了一个有恒定角速度为 $\omega_s$ 的旋转(spin)外,还有一个角振幅为A,角频率为 $\omega_w$ 的摇摆(waggle)。

通过初步分析,本文认为磁子竖直方向上的稳定性是由于磁子转动时,排斥力作用时间大于吸引力作用时间,一个周期内斥力和吸引力的平均作用效果和重力作用效果实现平衡(抵消)<sup>[14]</sup>,而水平方向上的稳定是由于偏离驱动子转轴的搅拌子会进行偏心抖动,产生指向驱动子转轴的向心力,使其回归。

令烧杯底至驱动子距离为 $Z_b$ ,搅拌子至驱动子距离为 $Z$ ,搅拌子转过的角度为 $\theta$ ,驱动子与搅拌子的夹角为 $\varphi$ 。

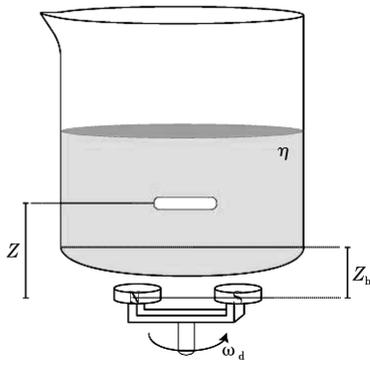
图1为实验装置示意图。

对于磁子悬浮前的过程,称之为同步过程。当驱动子转速不大时,搅拌子停留在容器底部,与驱动子同步转动。同步旋转阶段的动力学方程为:

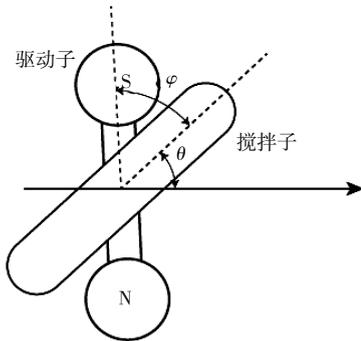
收稿日期:2022-09-02

基金项目:教育部产学合作协同育人项目(202102227049),兰州大学教育教学改革研究项目(20201105)

\* 通讯联系人



(a) 实验装置示意图



(b) 搅拌子和磁子角度示意图

图 1 装置示意图

$$D\dot{\theta} - M(z_b) \sin\varphi = 0 \tag{1}$$

其中,  $D = 8\pi\gamma K\eta l^3$ ,  $M(z) = \frac{\mu_0 m_d m_f}{4\pi z^3}$

$D$  是长椭球体的阻力常数,  $K$  是几何因子,  $\gamma$  表示由于容器底部的接近而增加的阻力,  $l$  是搅拌子长度,  $\eta$  是粘滞系数。  $m_d$  和  $m_f$  分别是驱动器和悬浮子的磁矩,  $\mu_0$  是真空磁导率。

随着  $\omega_d$  逐渐增加,  $\varphi$  逐渐增大至  $\pi/2$ , 此时磁力作用效果由吸引变为排斥, 磁力矩达到最大值。进一步加大转速, 使得阻力矩大于磁力矩, 搅拌子与驱动子不再同步, 最后达到悬浮状态。

当  $\varphi = \pi/2$  时, 由  $D\dot{\theta} - M(z_b) \sin\varphi = 0$  得:

$$\omega_d = \omega_{\uparrow} = \frac{M(z_b)}{D} \tag{2}$$

将  $M$  和  $D$  的表达式代入, 得:

$$\omega_{\uparrow} = \frac{\mu_0 m_d m_f}{32\pi^2 \gamma K \eta l^3 z^3} \tag{3}$$

此即悬浮子开始悬浮时的驱动子角速度。

悬浮后的水平方向上的动力学方程为:

$$I\ddot{\theta} + D\dot{\theta} - M(z) \sin(\omega_d t - \theta) = 0 \tag{4}$$

而归化后的竖直方向上的动力学方程为:

$$\ddot{z} + \frac{\dot{z}}{V_l} + \left(\frac{z_0}{z}\right)^4 \cos(\omega_d t - \theta) + 1 = 0 \tag{5}$$

$Z_0$  为悬浮子到驱动子的距离, 此时竖直方向上的磁力等于重力。  $v_l$  为搅拌子在甘油中自由下落的最最终速度,  $g'$  为考虑浮力后修正的重力加速度。

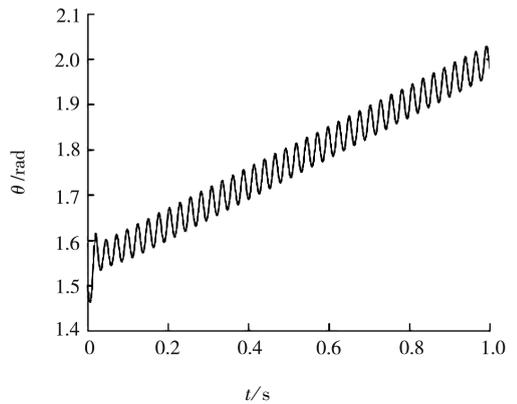
## 2 稳定悬浮高度与 $\omega_d$ 的关系

要进行数值计算, 需要知道的参量有: 磁子的转动惯量  $I$ , 式中的阻力常数  $D$ , 磁力力矩  $M(Z_0)$ 、等效重力加速度  $g'$ , 磁子下落的速度  $v_l$  以及式中的平衡高度  $Z_0$ 。

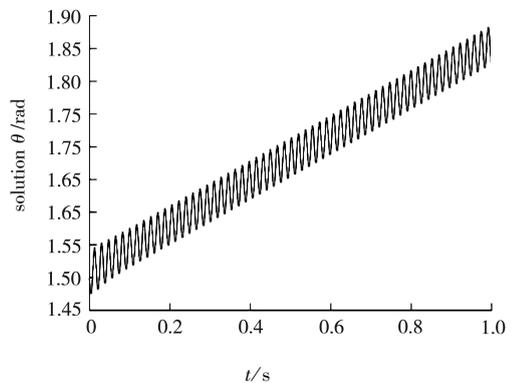
运用扭摆测量, 得转动惯量  $I = 2.47 \times 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。考虑到浮力后修正的等效重力加速度为  $g' = 8.01 \text{ m/s}^2$ 。测得  $Z_0$  为 4.25 cm。代入 (3) 得  $\mu_0 m_d m_f = 1.27 \times 10^{-6} \text{ m}^5 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$ 。测得此时的  $\omega_{\uparrow}$  为 242 rad/s。由其表达式可得  $D = 6.8 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ 。通过 tracker 获得悬浮子下沉的坐标数据, 通过线性拟合后得到  $v_l = 6.62 \text{ cm/s}$ 。

联立 (4)、(5),

将上面所测量结果带入微分方程, 运用 MATLAB 计算, 结果见图 2。



(a)  $\omega = 240 \text{ rad}$  的情况下,  $\theta$  随时间的变化



(b)  $\omega = 240 \text{ rad}$  的情况下,  $\theta$  随时间的变化 (ODE)

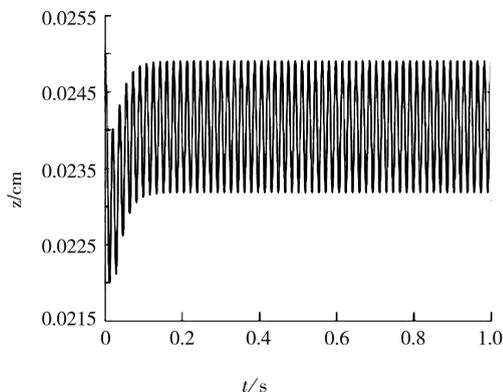
图 2 计算结果

图 2(a)是通过龙格库塔法<sup>[15]</sup>得到的  $\theta$  随时间的变化情况,可以看到,正如预期的,它是一个匀速转动和摆动的叠加。运用 ODE 函数<sup>[16]</sup>验证,得到了类似的结果(图 2(b))。

而后图 3 是转速分别为 180、240、300、360 rad/s 下,  $Z$  随时间的变化关系。

从图 3 可以看出,随着转速的增大,稳定悬浮的高度逐渐降低,振幅逐渐变小。

通过实验结果,可以验证上面的模拟结果。



(d)  $\omega = 360$  rad/s 的情况下,  $z$  随时间的变化

图 3 不同  $\omega$  值,  $z$  随时间的变化

在模拟时通过取不同的  $\omega_d$  得到相应的稳定悬浮的高度,再将其连接起来,作为  $Z-\omega_d$  理论曲线。实际实验中,通过在不同的  $\omega_d$  下测得稳定悬浮的高度,作为实验值,从图 4 中可以看出实验值与理论值吻合得很好,表明理论模型基本正确。

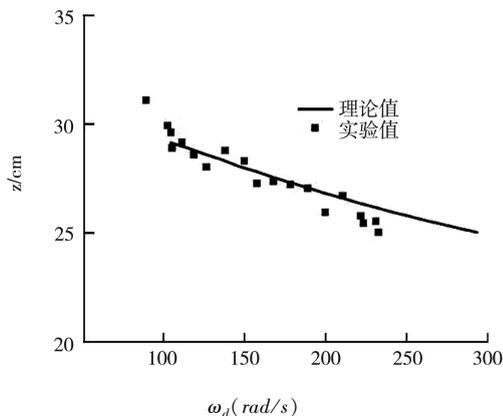
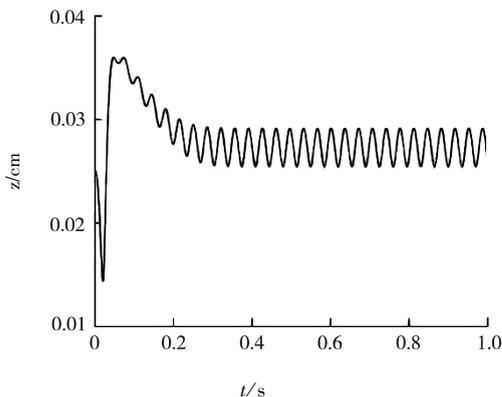


图 4 悬浮高度与驱动子转速之间的关系

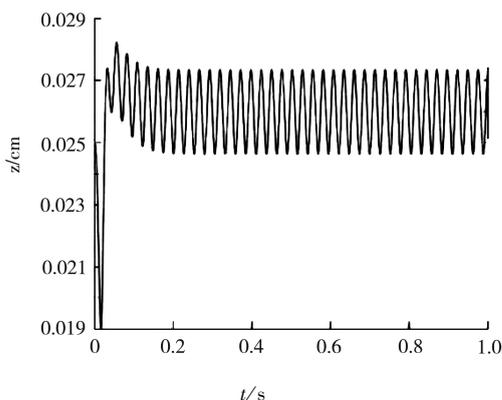
上述的理论计算结果和实验结果表明,在甘油液体中,可以通过改变相关参量(例如  $\omega_d$ ),来控制稳定悬浮的悬浮高度。

### 3 影响 $\omega_{\uparrow}$ 与 $\omega_{\downarrow}$ 的相关参数

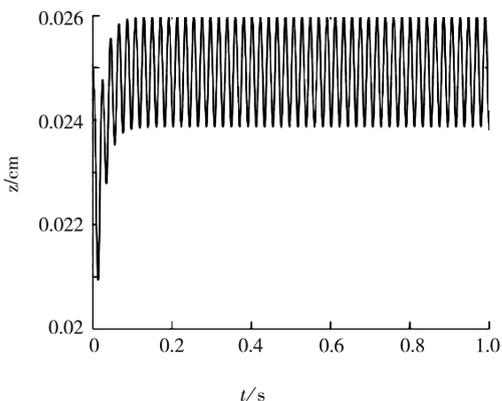
另外,对可能影响  $\omega_{\uparrow}$ 、 $\omega_{\downarrow}$  的另外几个参数也进行了研究。具体研究的参量关系有:(a)研究了  $\omega_{\uparrow}$ 、 $\omega_{\downarrow}$  与液体深度的关系(图 5.(a)),结果表明  $\omega_{\uparrow}$ 、 $\omega_{\downarrow}$  与液体深度无明显关系;(b)研究了  $\omega_{\uparrow}$ 、 $\omega_{\downarrow}$  与甘油浓度的关系,如图 5(b)所示,  $\omega_{\uparrow}$  与粘度的-1.5 次方成正比;(c)研究了  $\omega_{\uparrow}$ 、 $\omega_{\downarrow}$  与  $Z_b$  的关系,图 5(c)显示  $\omega_{\uparrow}$  与  $Z_b$  的负三次方成正



(a)  $\omega = 180$  rad/s 的情况下,  $z$  随时间的变化

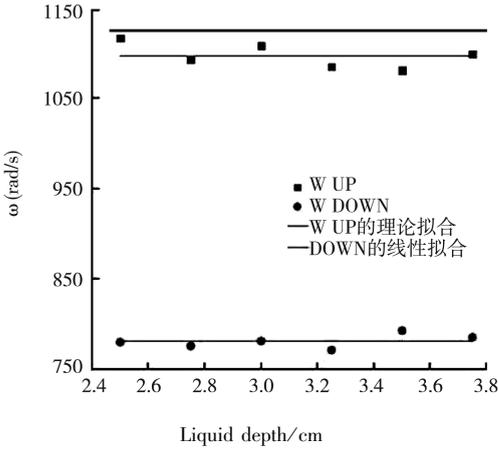


(b)  $\omega = 240$  rad/s 的情况下,  $z$  随时间的变化

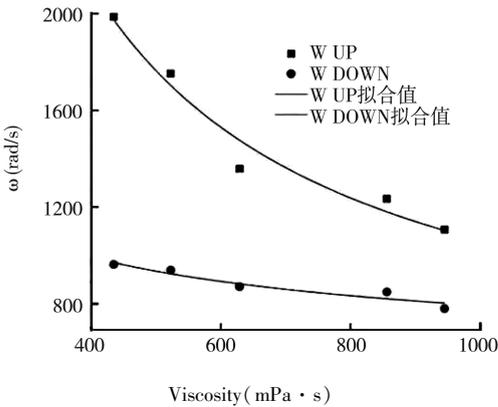


(c)  $\omega = 300$  rad/s 的情况下,  $z$  随时间的变化

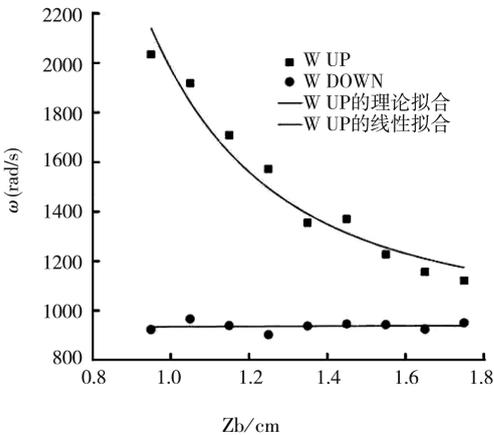
比;(d)研究了不同尺寸搅拌子与 $\omega_{\uparrow}$ 、 $\omega_{\downarrow}$ 的关系(图 5(d)),可以看到 $\omega_{\uparrow}$ 、 $\omega_{\downarrow}$ 对于不同尺寸存在差异;(e)研究了不同杯径烧杯与 $\omega_{\uparrow}$ 、 $\omega_{\downarrow}$ 的关系(图 5(e)),实验结果 $\omega_{\uparrow}$ 、 $\omega_{\downarrow}$ 与杯径无明显关系。



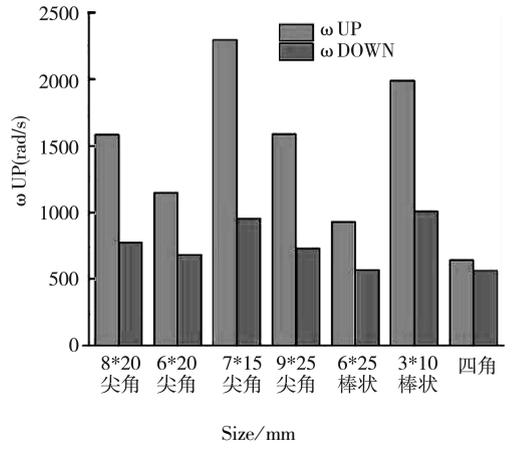
室温 25 °C, Z<sub>b</sub>=1.35 cm、浓度 100%  
(a)  $\omega$  与液体深度的关系



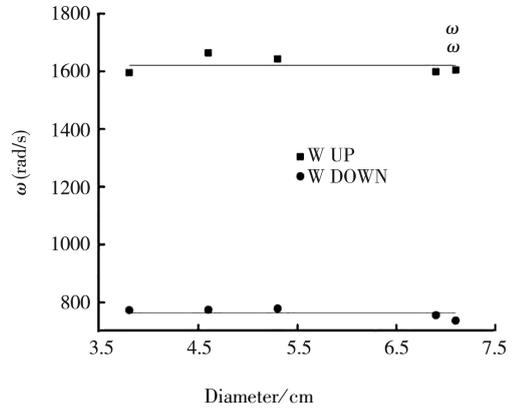
室温 25 °C, 液面高度 3 cm, Z<sub>b</sub>=1.35 cm  
(b)  $\omega$  与甘油浓度 (液体粘度) 的关系



室温 25 °C, 液面高度 3 cm、浓度 100%  
(c)  $\omega$  与 Z<sub>b</sub> 的关系



(d)  $\omega$  与搅拌子尺寸的关系



(e)  $\omega$  与杯径的关系

图 5  $\omega$  与不同参数的关系

图 5 为相应的实验结果,从图中可以看出 $\omega_{\uparrow}$ 、 $\omega_{\downarrow}$ 与液体深度和杯径无明显关系。并且正如理论预测, $\omega_{\uparrow}$ 与粘度的 $-1.5$ 次方成正比,与 $Z_b$ 的负三次方成正比。另外,由于不同形状和长度的磁子会影响 $\omega_{\uparrow}$ 中的其它各参量,又研究了 $\omega$ 与几何外型的定性关系。

从以上数据可得,实验的现象基本符合 $\omega_{\uparrow}$ 的理论公式的结论。

## 4 结 语

综上所述,磁力搅拌器提供了一种简单的被动磁悬浮方法,在这种方法中,悬浮子可以长时间地稳定悬浮。本研究中观察了磁悬浮现象,分析了其处于动态稳定状态的原因,得到了具体的运动方程。而后通过用数值方法解微分方程,得到了理论结果,并通过实验数据验证了理论计算,最后探究了稳定悬浮的阈值与相关参数的影响。

## 参考文献:

- [1] KORDYUK A A. Magnetic levitation for hard superconductors[J]. Journal of Applied Physics, 1998, 83(1):610-612.
- [2] VISCHER D, BLEULER H. Self-sensing active magnetic levitation [J]. Ieee Transactions on Magnetics, 1993, 29(2):1276-1281.
- [3] 陈姝, 邓智泉, 王晓琳, 等. 无轴承薄片电机系统被动悬浮特性的研究 [J]. 电子机械工程, 2007, 23(5):1-5.
- [4] 廖启新, 王晓琳, 邓智泉. 无轴承薄片电机二维被动悬浮特性 [J]. 电机与控制学报, 2008, 12(2):117-121.
- [5] LAHDO M, STROHLA T, KOVALEV S. Repulsive magnetic levitation force calculation for a high precision 6-dof magnetic levitation positioning system [J]. Ieee Transactions on Magnetics, 2017, 53(3):7200106.
- [6] RUSCONI C C, POCHHACKER V, KUSTURA K, et al. Quantum spin stabilized magnetic levitation [J]. Physical Review Letters, 2017, 119(16):167202(1)-167202(5).
- [7] PAINE C G, SEIDEL G M. Magnetic-levitation of condensed hydrogen [J]. Review of Scientific Instruments, 1991, 62(12):3022-3024.
- [8] SIMON M D, HEFLINGER L O, RIDGWAY S L. Spin stabilized magnetic levitation [J]. American Journal of Physics, 1997, 65(4):286-292.
- [9] ZEISBERGER M, GAWALEK W, GIUNCHI G. Magnetic levitation using magnesium diboride [J]. Journal of Applied Physics, 2005, 98(2):023905(1)-023905(4).
- [10] WAI R J, LEE J D. Backstepping-based levitation control design for linear magnetic levitation rail system [J]. Iet Control Theory and Applications, 2008, 2(1):72-86.
- [11] ABDEL-KHALIK A, MASSOUD A, ELSEROUGI A, et al. Ieee In A Coaxial magnetic gearbox with magnetic levitation capabilities [J]. 20th International Conference on Electrical Machines (ICEM), Marseille, FRANCE, Sep 02-05; Marseille, FRANCE, 2012:542-548.
- [12] DURMUS N G, TEKIN C, GUVEN S, et al. Magnetic levitation of single cells [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2015, 112(28):E3661-E3668.
- [13] WANG J X, ZHAO L, YU L. Adaptive terminal sliding mode control for magnetic levitation systems with enhanced disturbance compensation [J]. Ieee Transactions on Industrial Electronics, 2021, 68(1):756-766.
- [14] BALDWIN K A, DE FOUCHIER J B, ATKINSON P S, et al. Magnetic levitation stabilized by streaming fluid flows [J]. Physical Review Letters, 2018, 121(6):064502(1)-064502(5).
- [15] 王励扬, 翟昆朋, 何文涛, 等. 四阶龙格库塔算法在捷联惯性导航中的应用 [J]. 计算机仿真, 2014(11):56-59.
- [16] 闫俊霞, 刘初升, 张阳. 非线性振动系统分析软件的设计及应用 [J]. 机电信息, 2011(9):98-99.

## Research on Stable Suspension of the Magnon in Viscous Liquid

FENG Juanjuan<sup>1\*</sup>, LI Yuanjie<sup>2</sup>, WANG Xinhua<sup>1</sup>

(1. National Demonstration Center for Experimental Physics Education, School of Physical Science and Technology, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China; 2. School of Physical Science and Technology, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

**Abstract:** Theoretical and experimental results show that magnetic agitators can provide a simple passive magnetic levitation method in which the levitator can be suspended stably for a long time. It studied this phenomenon, analyzed the causes of the suspension, and quantitatively analyzed the motion of the levitator (a combination of vertical oscillation, rotation and swing). The experimental results agree well with the mechanical analysis model (using the Runge-Kutta method to solve the binary second-order differential equations). This research has implications for the movement of artificial swimmers and for the development of bidirectional microfluidic pumps, providing an alternative to complex commercial suspensors.

**Keywords:** hydrodynamics; rheology; ferromagnetic; vortex